

# UNIVERSITÄT TÜBINGEN

## PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM II

RE

---

# Elektrische Resonanz

---

*Von:*  
Fabian Kraus  
Simon Fischer

*Betreuung:*  
Dr. T. Hehl

10. Dezember 2021

## Inhalt

<b>1</b>	<b>Versuchsbeschreibung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Physikalische Grundlagen</b>	<b>1</b>
2.1	Bauteile . . . . .	1
2.1.1	OHM'scher Widerstand . . . . .	1
2.1.2	Kondensator . . . . .	1
2.1.3	Spule . . . . .	1
2.2	Schwingkreise . . . . .	2
2.2.1	Reihenschwingkreis . . . . .	2
2.2.2	Parallelschwingkreis 1.Ordnung . . . . .	2
2.2.3	Parallelschwingkreis 2.Ordnung . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Ergebnisse &amp; Auswertung</b>	<b>3</b>
4.1	Analoge Messung . . . . .	3
4.2	Digitale Messung . . . . .	4
4.2.1	Serienschwingkreis . . . . .	4
4.2.2	Parallelschwingkreis 1. Ordnung . . . . .	7
4.2.3	Parallelschwingkreis 2. Ordnung . . . . .	10
4.3	Zusammenfassung . . . . .	13

# 1 Versuchsbeschreibung

Die Resonanzen drei verschiedener elektronischer Schwingkreise, bestehend aus Widerständen, Kondensatoren und Spulen, werden untersucht. Die Impedanz  $Z$ , die den Zusammenhang zwischen Stromstärke  $I$  und Spannung  $U$  angibt, wird mit den theoretischen Vorhersagen verglichen.

## 2 Physikalische Grundlagen

### 2.1 Bauteile

Zur Beschreibung der im Versuch verwendeten passiven Bauteilen (Ohmscher Widerstand, Kondensator, Spule) nutzt man das Ohmsche Gesetz für komplexe Variablen, da bei Wechselspannung Strom  $I = \hat{I} \exp(i\omega t)$  und Spannung  $U = \hat{U} \exp(i(\omega t + \varphi))$  (Wechselstrom) eine Phasenverschiebung  $\varphi$  haben können. Wir definieren  $Z$  als den komplexen Ohm'schen Widerstand, die sogenannte *Impedanz*, und haben analog zum Ohm'schen Gesetz  $R = U/I$ :

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} e^{i\varphi} = \hat{Z} e^{i\varphi} \quad (1)$$

Die *Admittanz*  $Y$  ist definiert als Kehrwert der Impedanz

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\hat{Z}} e^{-i\varphi} \quad (2)$$

#### 2.1.1 Ohm'scher Widerstand

Für einen Ohm'schen Widerstand erwarten wir, dass wir wieder das reelle Gesetz erhalten, also

$$Z_R = R + 0i \quad (3)$$

Es ist also  $\varphi = 0$ , da ein negativer Widerstand mit  $\varphi = \pi$  keinen physikalischen Sinn macht.

#### 2.1.2 Kondensator

Für einen Kondensator ergibt sich aus der Definition der Kapazität  $C = Q/U$ :

$$I = \dot{Q} = \dot{U}C = i\omega \hat{U} e^{i\omega t} C$$

Daraus berechnet sich die Impedanz mit (1) zu

$$Z_C = \frac{\hat{U} e^{i\omega t}}{i\omega \hat{U} e^{i\omega t} C} = \frac{1}{i\omega C} = -i\hat{Z} \quad (4)$$

Es eilt also der Strom der Spannung voraus um  $\varphi = -\pi/2$ .

#### 2.1.3 Spule

Aus dem Induktionsgesetz  $L = U/\dot{I}$  folgt

$$I = \int \dot{I} dt = \int \frac{U}{L} dt = \frac{\hat{U} e^{i\omega t}}{i\omega L}$$

Daraus berechnet sich die Impedanz mit (1) zu

$$Z_L = \frac{\hat{U} e^{i\omega t}}{\frac{\hat{U} e^{i\omega t}}{i\omega L}} = i\omega L = i\hat{Z} \quad (5)$$

Hier hängt also der Strom der Spannung hinterher mit  $\varphi = \pi/2$ .

## 2.2 Schwingkreise

### 2.2.1 Reihenschwingkreis

Bei in Reihe geschalteten Bauteilen addieren sich die Impedanzen, wir haben also mit den Ergebnissen von oben:

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i(\omega L - 1/\omega C)$$

Uns interessiert nun der Betrag von  $Z$  und die Phasenverschiebung  $\varphi$ . Letztere ist gegeben durch  $\tan(\varphi) = \text{Im}(Z)/\text{Re}(Z)$ . Wir haben also:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$
$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Resonanz tritt auf, wenn  $\varphi = 0$ . Es gilt also für die Resonanzfrequenz  $\omega_0$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6)$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (7)$$

### 2.2.2 Parallelschwingkreis 1.Ordnung

Bei parallel geschalteten Bauteilen addieren sich die Kehrwerte der Impedanzen, also die Admittanzen. Wir haben also hier:

$$Y = Y_R + Y_L + Y_C = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} + \frac{\omega C}{-i} = \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Damit folgt wie vorher

$$|Z| = \frac{1}{|Y|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}}$$
$$\tan(\varphi) = \frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)} = -\frac{\text{Im}(Y)}{\text{Re}(Y)} = -\frac{R}{\omega L} (\omega^2 LC - 1)$$

Die Phasenverschiebung verschwindet also bei der selben Frequenz wie beim Reihenschwingkreis

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (8)$$

### 2.2.3 Parallelschwingkreis 2.Ordnung

Hier sind R und L in Reihe, C parallel zu beiden. Für Widerstand und Spule gilt  $Y_{RL} = 1/(R + i\omega L)$ , für den Kondensator  $Y_C = i\omega C$ , diese addieren sich zu:

$$Y = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + i\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)$$
$$\Rightarrow |Y| = \sqrt{\left(\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)^2}$$
$$\tan(\varphi) = -\frac{\text{Im}(Y)}{\text{Re}(Y)} = \frac{\omega L - \omega C(R^2 + (\omega L)^2)}{R}$$

Es tritt wieder Resonanz auf, wenn  $\text{Im}(Y) = 0$ , wir haben also hier eine andere Resonanzfrequenz:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \quad (9)$$

### 3 Versuchsdurchführung

Der Versuch hat zwei Teile:

1. Zuerst wird eine der Schaltungen (wir haben den Reihenschwingkreis gewählt) mit einem analogen Oszilloskop untersucht. Aus der entstehenden Ellipse (Lissajous-Figur) kann man graphisch die Phasenverschiebung  $\varphi$  und den Betrag der Impedanz  $|Z|$  bestimmen, indem man die Ellipse vermisst.

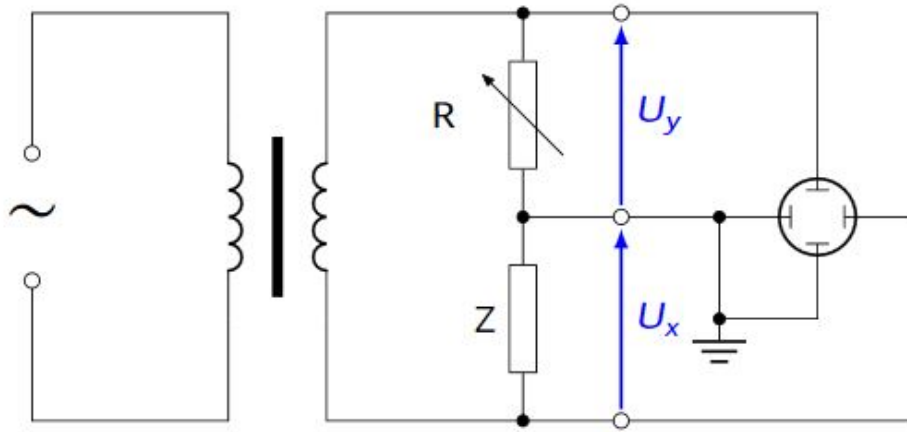


Abbildung 1: Versuchsaufbau Teil 1. (aus der Anleitung)

2. Nun erfasst man digital (mit CASSY) die drei Schwingkreise bei verschiedenen Frequenzen mit je zwei unterschiedlichen Widerständen. Anschließend werden Admittanz, Impedanz, Phasenverschiebung und Resonanzfrequenz mit den theoretischen Vorhersagen verglichen.

## 4 Ergebnisse & Auswertung

### 4.1 Analoge Messung

Für den analogen Teil haben wir den Reihenschwingkreis gewählt; benutzt wurden folgende Bauteile:

1. Ein Widerstand mit  $R = 3.303k\Omega$
2. Eine Spule mit  $L = 314.8mH$
3. Ein Kondensator mit  $C = 28.47nF$

Damit folgt aus der Theorie (Gleichung (7)) eine Resonanzfrequenz von  $f_0 = 1.681kHz$ . Diese Frequenz wurde auch im Experiment näherungsweise bestätigt.

Im folgenden Diagramm ist der berechnete Verlauf der Impedanz  $Z$  und der Phasenverschiebung  $\varphi$  mit der theoretischen Vorhersage verglichen. Man erkennt, dass beide sehr gut mit der Vorhersage übereinstimmen.

Ebenso passt die Phasenverschiebung sehr gut zur Theorie: Auch wenn diese nicht bei allen Messpunkten exakt im Fehlerbereich liegt, kann man den Verlauf der Kurve gut nachvollziehen.

Insgesamt kann man also sagen, dass die analoge Messung eine befriedigende Genauigkeit hatte; der Fehler der gemessenen Impedanz hat eine Größenordnung von ungefähr  $\Delta I \approx 0.5k\Omega$  und die Phasenverschiebung einen Fehler im Bereich von  $\Delta\varphi \approx 3.5$ . Für diese Fehler wurde angenommen, dass der relative Fehler bei den Kenngrößen der Bauteile ein Prozent ist, und der Fehler beim Ablesen der Position und Halbachsen der Ellipse im Oszilloskop ein Millimeter war.

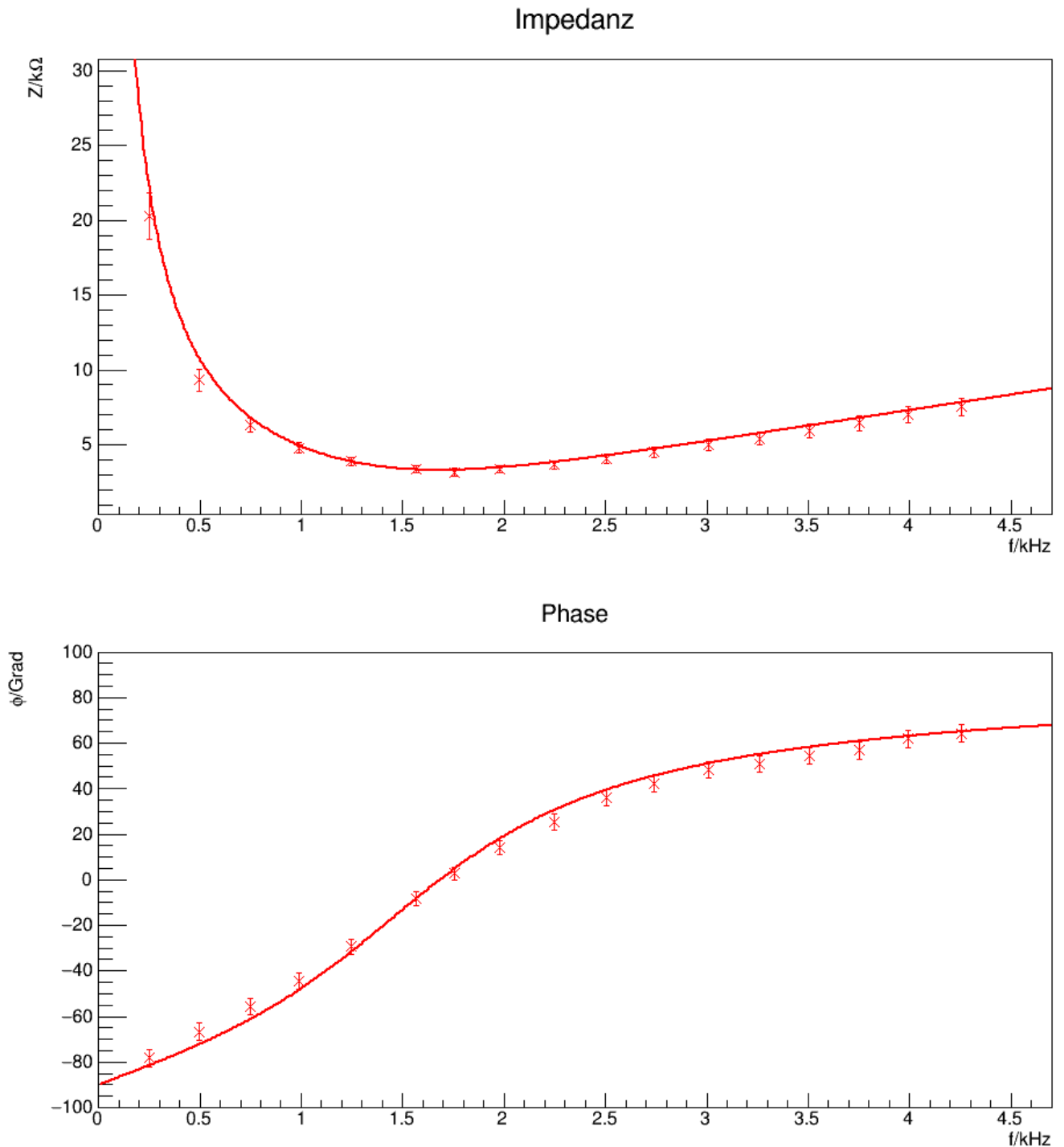


Abbildung 2: Auswertung der analogen Messung (Rote Linie = Theorie)

## 4.2 Digitale Messung

### 4.2.1 Serienschwingkreis

Im Serienschwingkreis wurde zunächst mit den Widerständen  $1.492k\Omega$  und anschließend mit  $3.302k\Omega$  gemessen. Die Spule hatte in jeder der folgenden Messungen eine Induktivität von  $314.8mH$  und der Kondensator eine Kapazität von  $28.47nF$ .

#### 1. Widerstand $R = 1.492k\Omega$

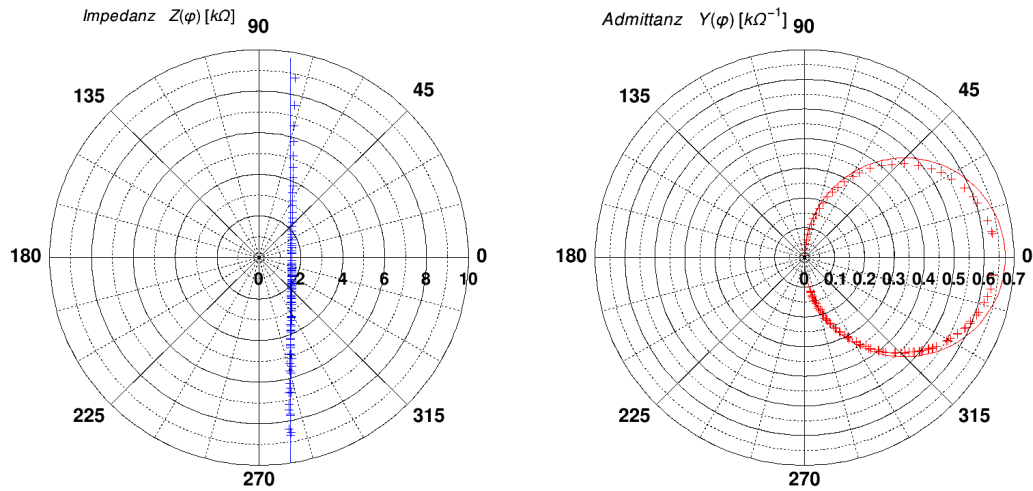


Abbildung 3: Ortskurve der Impedanz und Admittanz

Die Ortskurve ist nahe dem Ursprung eine vertikale Gerade, was der Theorie entspricht, da eine Änderung der Frequenz einer Geraden parallel zur imaginären Achse entspricht. Nur für große Werte von  $Z$  weicht die gemessene Impedanz von der Erwartung ab. Die Impedanzkurve ist in der Abbildung unterhalb zu sehen. Die theoretische Kurve stimmt sehr gut mit den Messwerten überein.

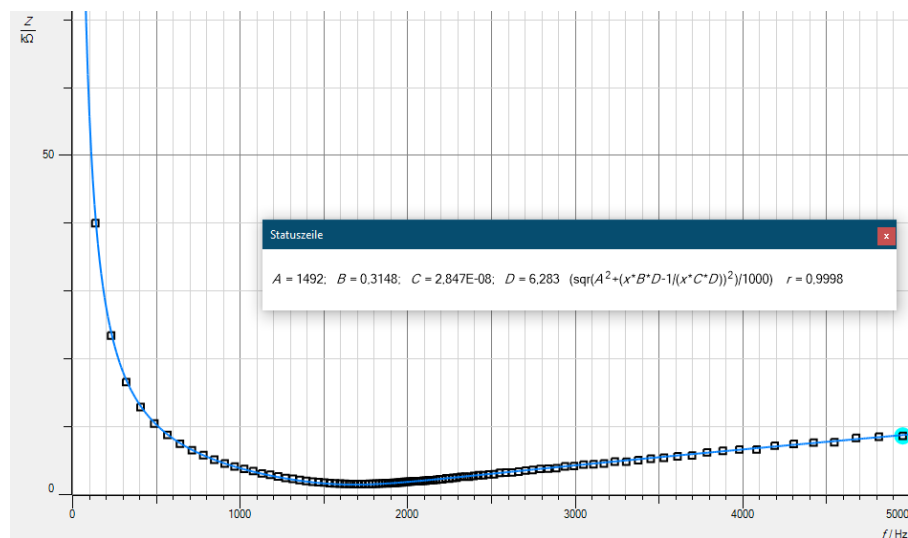


Abbildung 4: Impedanz in Abhängigkeit von der Frequenz

Das Minimum der Messwerte liegt bei 1701Hz und beträgt 1.57kΩ und damit sehr nahe am theoretischen Wert (nach Gleichung (2.2.1)) von  $|Z|$  mit  $|Z| = 1.492\text{k}\Omega$ . Die erwartete Resonanzfrequenz beträgt nach Beziehung (7) genau  $f_0 = 1681.16\text{Hz}$  und liegt sehr nahe am experimentell bestimmten Wert.

In folgender Abbildung ist die Phasenverschiebung  $\phi$  zwischen Strom und Spannung aufgetragen.

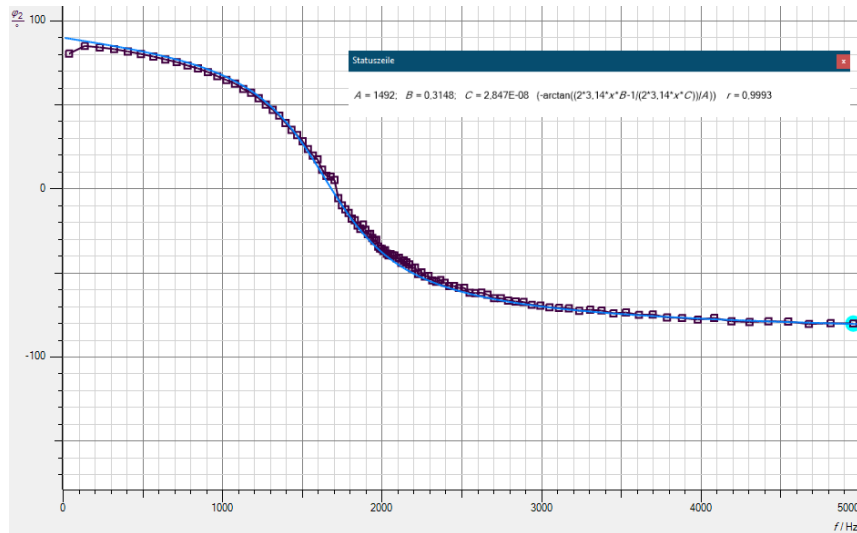


Abbildung 5: Phasenverschiebung in Abhängigkeit von der Frequenz

Wieder stimmt das Experiment mit der theoretisch berechneten Kurve sehr gut überein. Ein Wechsel des Vorzeichens ist genau bei der Resonanzfrequenz zu erkennen.

Als letztes Diagramm für  $R = 1.492\text{k}\Omega$  ist die polare Ortskurve der Admittanz zu sehen.

## 2. Widerstand $R = 3.302\text{k}\Omega$

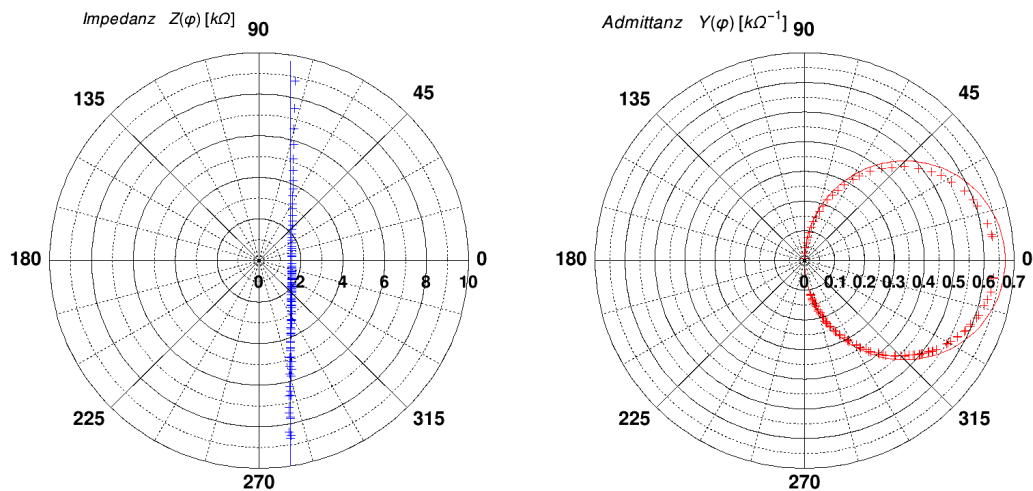


Abbildung 6: Ortskurve der Impedanz und Admittanz

Erneut sehen wir eine vertikale Linie für die Impedanz und einen Kreis für die Admittanz wie erwartet.

Die Impedanzkurve für  $R = 3.302\text{k}\Omega$  ist in der Abbildung unterhalb zu sehen. Die theoretische Kurve stimmt erneut sehr genau mit den Messwerten überein.

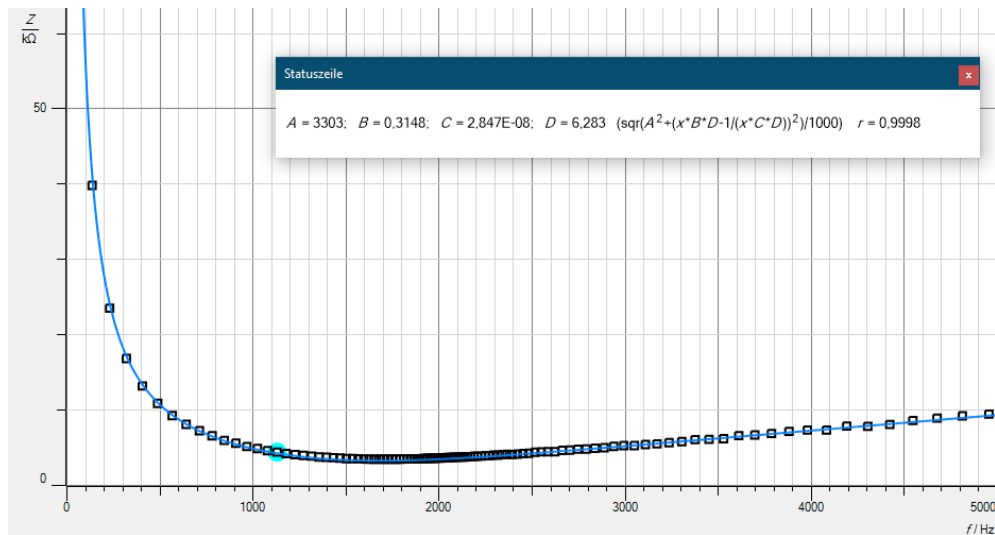


Abbildung 7: Impedanz in Abhängigkeit der Frequenz

Das Minimum der Messungen ist  $Z = 3.5k\Omega$  und damit nahe an  $R = 3.302k\Omega$  (nach Gleichung (2.2.1)), die Abweichung ist jedoch geringfügig größer als im obigen Fall von  $R = 1.492k\Omega$ . Die theoretisch erwartete Resonanzfrequenz liegt nach Beziehung (7) erneut bei  $f_0 = 1681.16Hz$ , da diese unabhängig vom Widerstand ist. Die Messung ergab erneut  $f_0 = 1701Hz$  im Minimum von  $Z$  und damit als Resonanzfrequenz. Als letztes betrachten wir noch das Diagramm, das den Zusammenhang zwischen Phasenverschiebung und Frequenz für den Fall  $R = 3.302k\Omega$  zeigt.

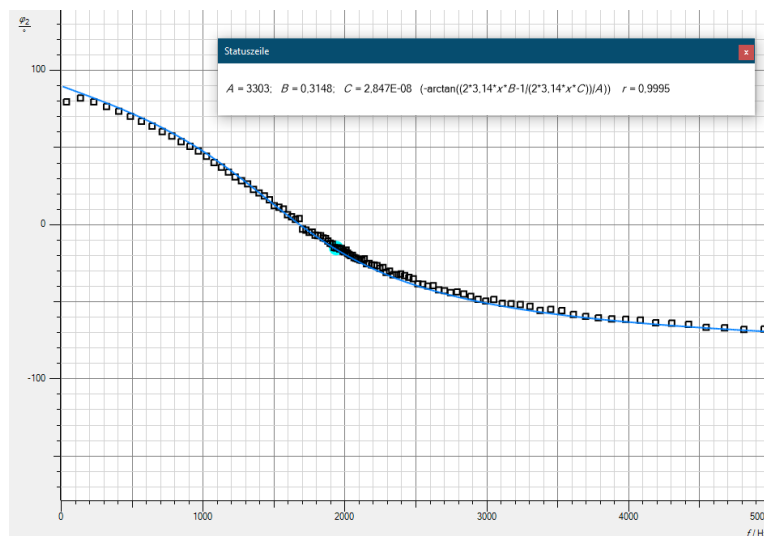


Abbildung 8: Impedanz in Abhängigkeit von der Frequenz

Erneut liegt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie vor.

#### 4.2.2 Parallelschwingkreis 1. Ordnung

Bei der Messung des Parallelschwingkreises erster Ordnung wurden erneut eine Spule mit Induktivität  $314.8mH$  und ein Kondensator eine Kapazität von  $28.47nF$  gewählt.

##### 1. Widerstand $R = 21.98k\Omega$

In nachfolgender Abbildung ist die Ortskurve zu sehen.



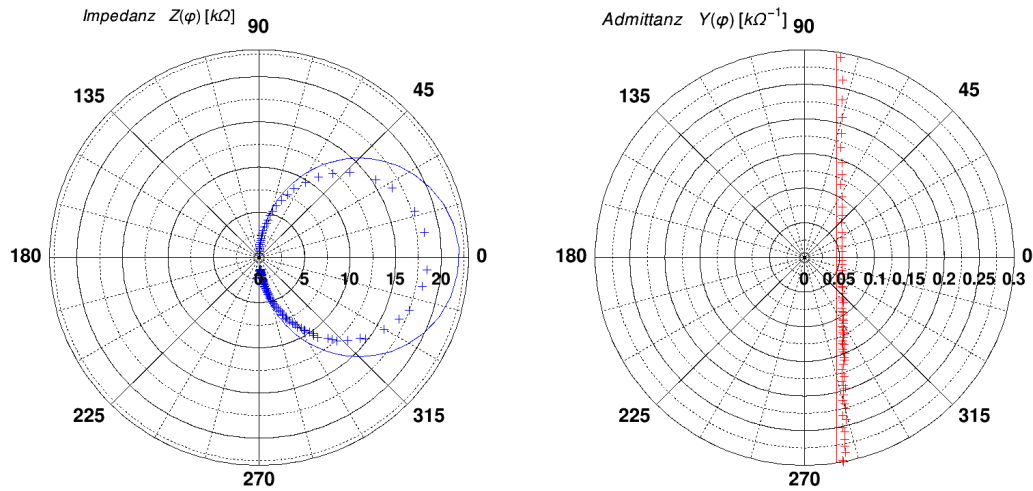


Abbildung 9: Impedanz und Admittanz (Ortskurve)

Die Kurven entsprechen der theoretischen Erwartung, da nun in der Parallelschaltung durch die Kehrwerte eine Umkehrung der Schaubilder im Vergleich zur Serienschaltung erfolgt ist. Dies ist damit zu erklären, dass die Admittanz  $Y$  der Kehrwert der Impedanz ist.

Die Resonanzfrequenz berechnet sich nach (8) zu  $f_0 = 1681.16\text{Hz}$ . Die Messwerte ergeben ein Maximum bei  $f = 1701\text{Hz}$ , was auf die Resonanzfrequenz hindeutet.  $Z$  hat dort den Wert  $Z = 18.49\text{k}\Omega$ , was eine Abweichung von 16% des theoretisch berechneten Widerstands  $|Z| = 21.98\text{k}\Omega$  bei der Resonanzfrequenz entspricht. Dies ist auf den Eigenwiderstand der Spule zurückzuführen.

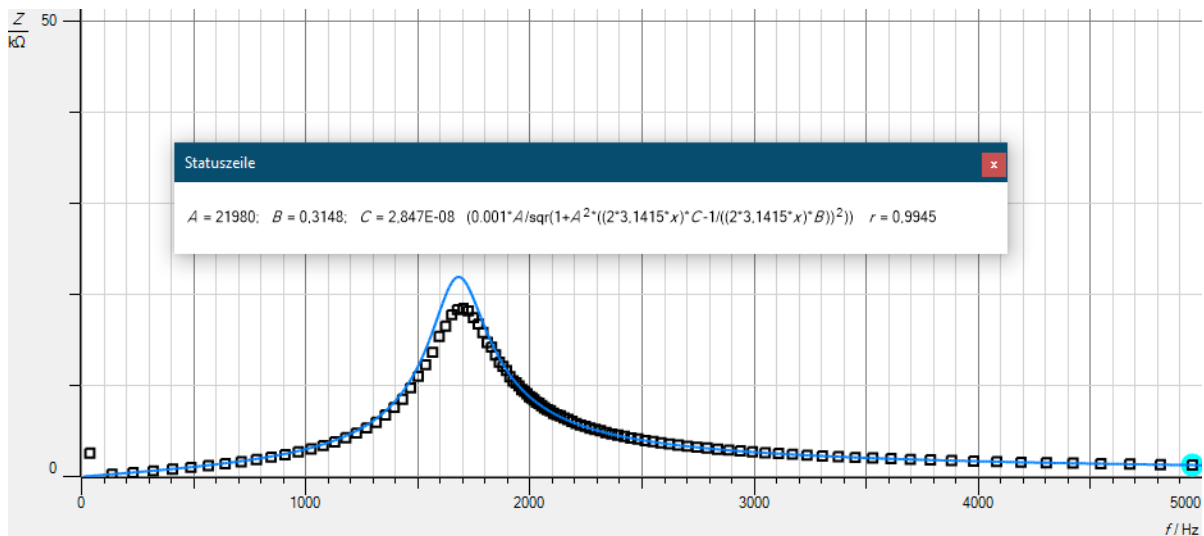


Abbildung 10: Impedanz in Abhängigkeit von der Frequenz

Das Diagramm der Phasenverschiebung ist unten gezeigt.

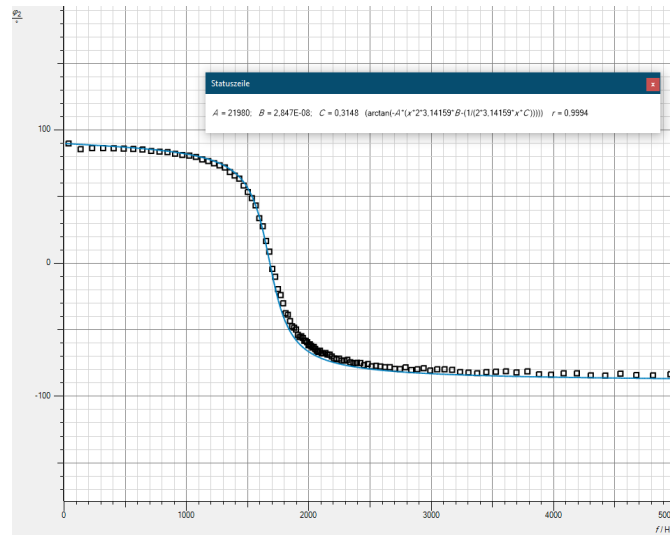


Abbildung 11: Phase in Abhängigkeit von der Frequenz

Die Phasenverschiebung der theoretischen Berechnungen stimmt mit der des Experiments überein.

## 2. Widerstand $R = 47\text{k}\Omega$

In nachfolgender Abbildung ist die Ortskurve für die Parallelschaltung mit  $R = 47\text{k}\Omega$  zu sehen.

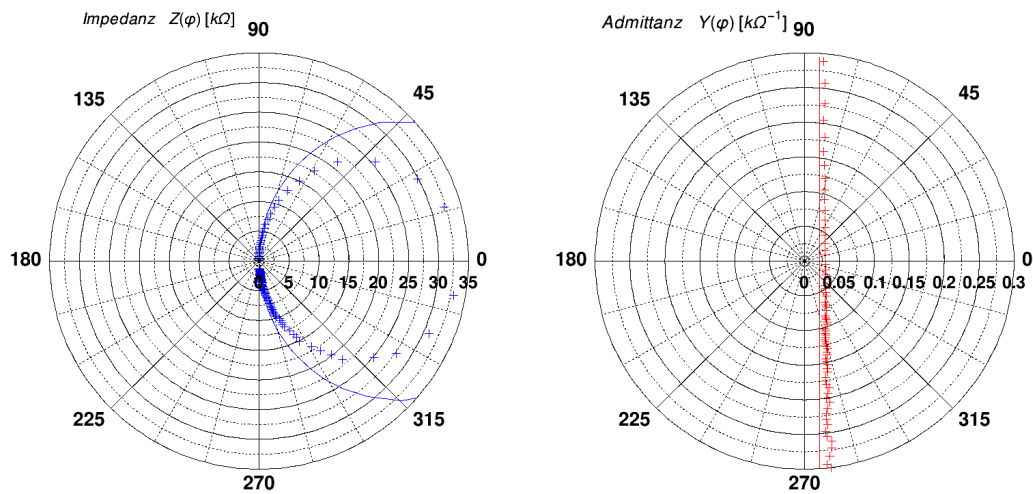


Abbildung 12: Impedanz und Admittanz (Ortskurve)

Die Admittanz ist erneut, wie in der Parallelschaltung erwartet, eine senkrechte Gerade. Die Impedanz weicht etwas vom theoretischen Fit ab.

Für den Fall des erhöhten Widerstands gelten obige Aussagen für die Resonanzfrequenz. Der einzige Unterschied ist, dass sich der maximale Widerstand auf  $Z = 33\text{k}\Omega$  beläuft. Die Kurve der Impedanz liegt deutlich unterhalb der theoretischen Kurve, die den Peak hingegen bei  $|Z| = 47\text{k}\Omega$  aufweist. Der Grund dafür ist, dass die Spule parallelgeschaltet zu dem ohmschen Widerstand einen Innenwiderstand besitzt. Somit reduziert sich der effektive Widerstand.

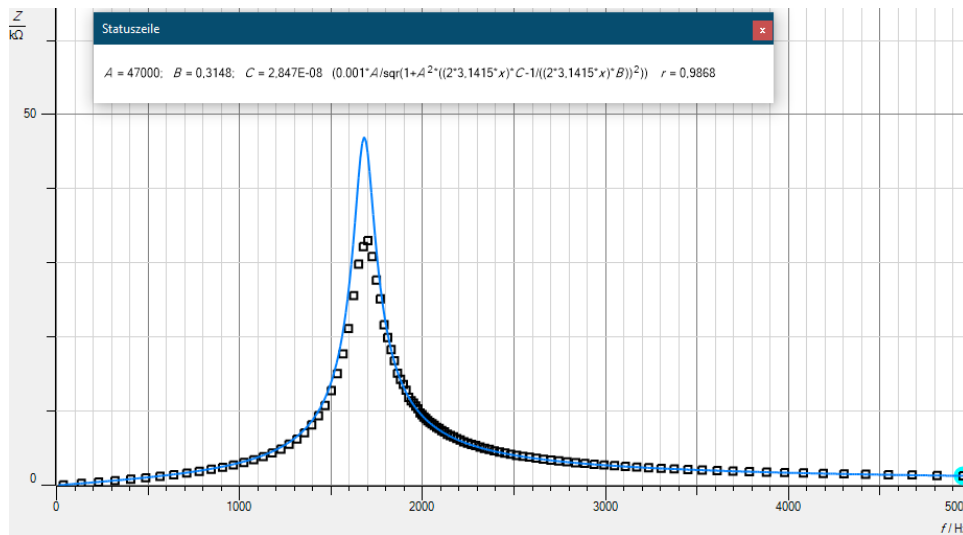


Abbildung 13: Impedanz in Abhängigkeit von der Frequenz

Die Phasenkurve ist unten gezeigt. Die Messwerte stimmen mit der Theorie weitestgehend überein.

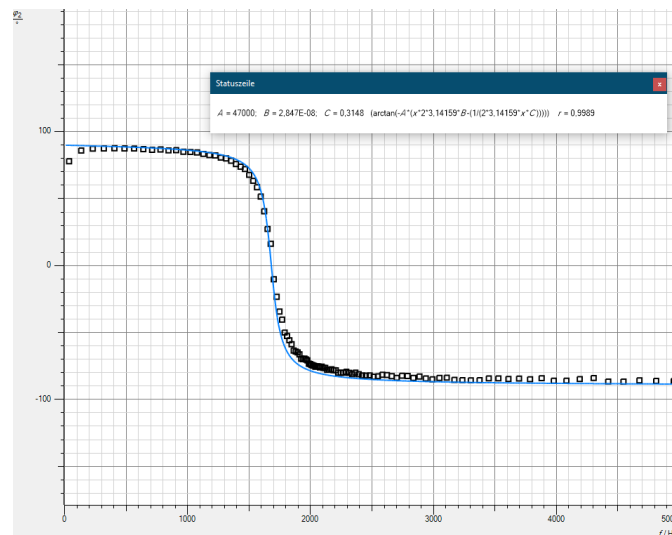


Abbildung 14: Phase in Abhängigkeit von der Frequenz

### 4.2.3 Parallelschwingkreis 2. Ordnung

Für den Parallelschwingkreis zweiter Ordnung wurden derselbe Kondensator und dieselbe Spule wie zuvor verwendet. Allein die Widerstände wurden zwischen  $330.2\Omega$  und  $1492\Omega$  variiert.

#### 1. Widerstand $R = 330.2\Omega$

Unten stehend befindet sich die Abbildung der Ortskurve für die Parallelschaltung mit  $R = 330.2\Omega$ .

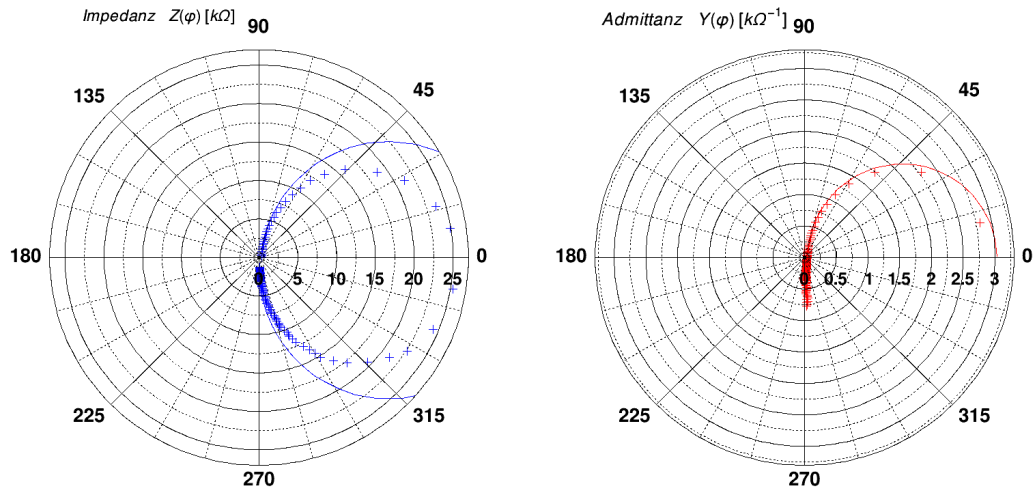


Abbildung 15: Impedanz und Admittanz (Ortskurve)

Nach Gleichung (9) berechnet sich die Resonanzfrequenz für den Parallelschwingkreis zweiter Ordnung mit den oben genannten Werten zu  $f_0 = 1672.85\text{Hz}$ . Das Maximum der Impedanzkurve liegt bei  $f = 1701\text{Hz}$  und liegt damit etwas über der berechneten Resonanzfrequenz bei  $Z = 25.31\text{k}\Omega$ , welcher erneut deutlich unter dem theoretischen Wert mit  $330.2\text{k}\Omega$  liegt, was erneut auf die nicht berücksichtigten Innenwiderstände und Drahtwiderstände zurückzuführen ist.

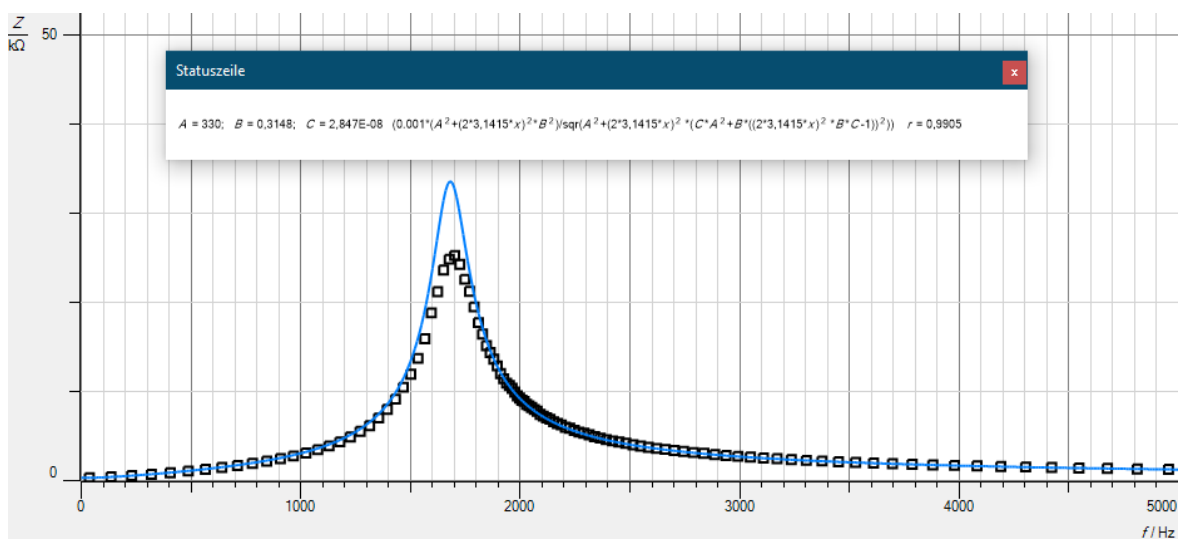


Abbildung 16: Impedanz in Abhängigkeit von der Frequenz

Die Kurve der Phasenverschiebung zeigt eine generelle Ähnlichkeit zur Theorie mit einem auffälligen Unterschied am Anfang. Dieser könnte möglicherweise von dem induzierten Strom entstehen, der nach der Lenz'schen Regel seiner Ursache entgegen gerichtet ist.

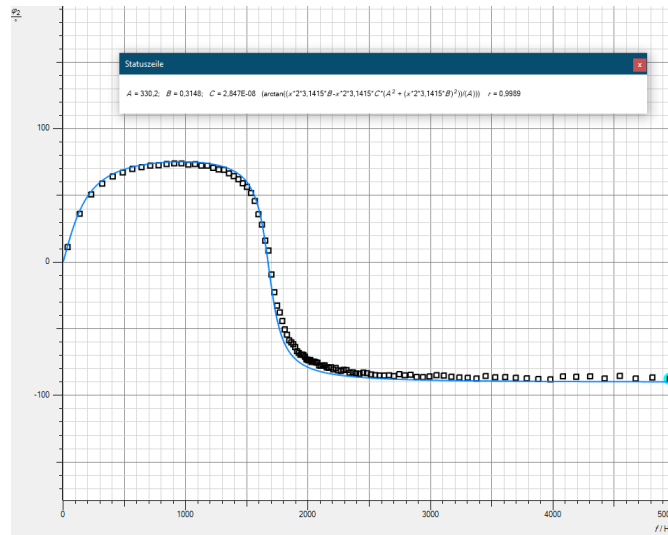


Abbildung 17: Phase in Abhängigkeit von der Frequenz

## 2. Widerstand $R = 1492\Omega$

Unterhalb befindet sich die Abbildung der Ortskurve für die Parallelschaltung mit  $R = 1492\Omega$ .

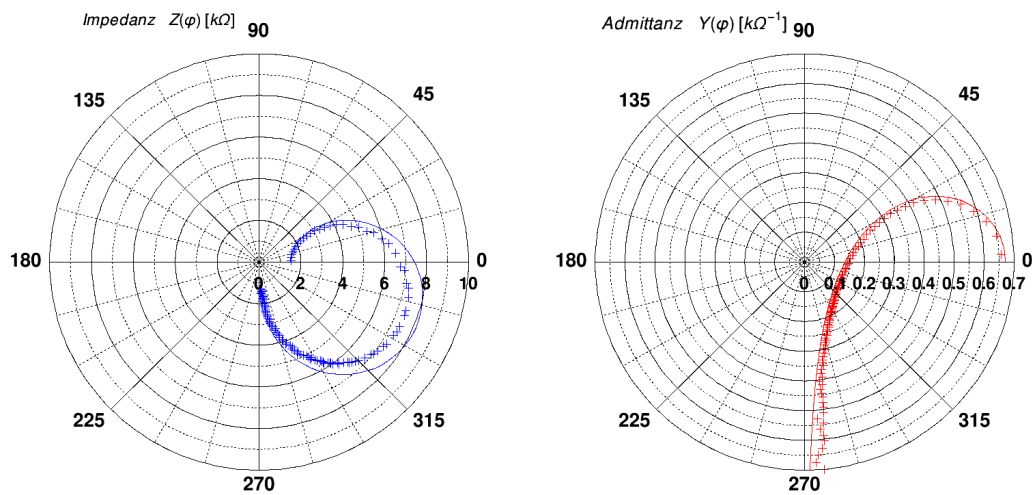


Abbildung 18: Impedanz und Admittanz (Ortskurve)

Die Resonanzfrequenz ist nach theoretischen Berechnungen  $f_0 = 1502.43\text{Hz}$ . Das Maximum der Impedanzkurve liegt bei  $f = 1676\text{Hz}$  mit  $Z = 7.41\Omega$ . Dies ist eine etwas größere Abweichung, die eventuell auf die nicht berücksichtigten Widerstände der Drähte und Messgeräte zurückgeführt werden kann.

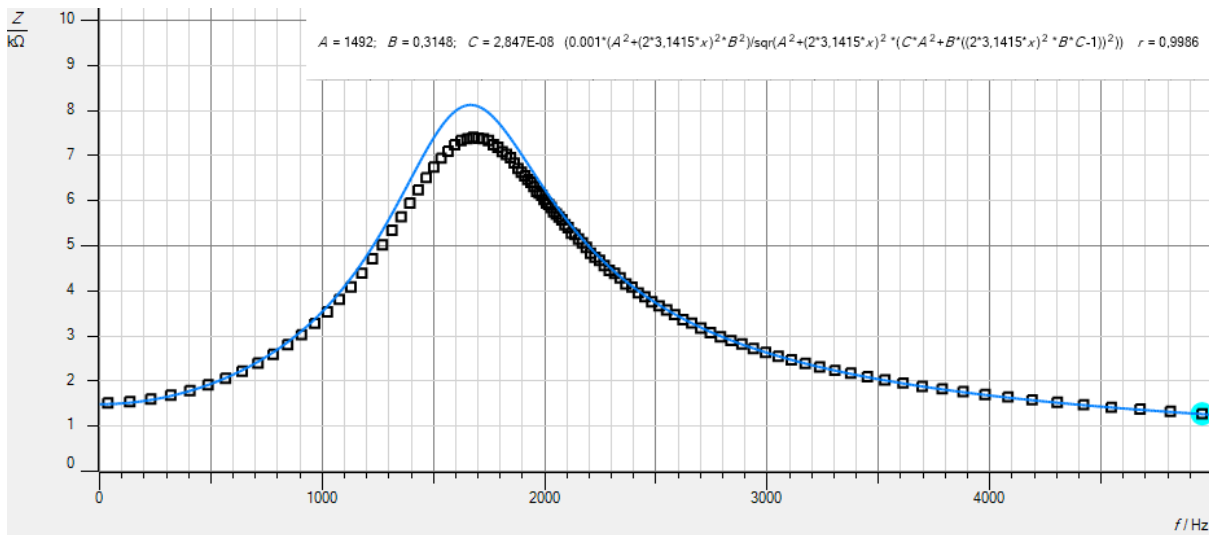


Abbildung 19: Phase in Abhängigkeit von der Frequenz

Die Phasenkurve zeigt erneut große Ähnlichkeit zum theroretischen Verlauf.

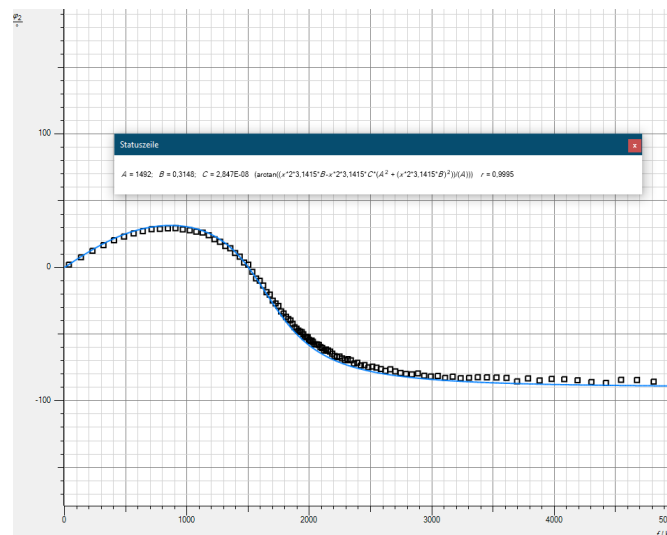


Abbildung 20: Phase in Abhängigkeit von der Frequenz

### 4.3 Zusammenfassung

Zum Abschluss werden noch einmal übergreifend die Resultate diskutiert. Man kann sehen, dass die Messwerte ziemlich genau mit den erwarteten Werten übereinstimmen. Die erwartete Kurve bei der analogen Messung mit dem Oszillator liegt innerhalb der Fehlergrenzen. Bei den digitalen Messungen mit CASSY kam es gelegentlich zu Abweichungen, die auf nicht berücksichtigte Widerstände zurückzuführen sind.